

# Etude Comparative des Applications Affines dans les Espaces Continus et dans les Espaces Discrets.

MBUYI KALUBI Charles<sup>1\*</sup>, MUSESA LANDA Alain<sup>1</sup>

## Paper History

Received:

September 20, 2019

Revised:

January 04, 2020

Accepted:

March 03, 2020

Published:

March 27, 2020

## Keywords:

Discrete geometry,  
quasi-affine  
transformation.

## ABSTRACT

### On Affine transformations in continuous and in discrete spaces

A quasi-affine application, being the integer part of a rational affine application, is the discretized form of an affine application. This article is dedicated to the study of conservation of some properties of affine applications (Preservation of barycenter, preservation of distance, existence of a fixed point) by quasi-affine applications. The quasi-affine applications studied are discrete translations, discrete homotheties as well as discrete rotations.

<sup>1</sup>Département de Mathématiques et Informatique, Faculté de Sciences, Université de Kinshasa, KINSHASA XI, Kinshasa, R.D. Congo.

\* To whom correspondence should be addressed: [charles.kalubi@gmail.com](mailto:charles.kalubi@gmail.com)

## INTRODUCTION

En géométrie, l'adjectif "discret" signifie qu'on s'intéresse à la géométrie des ensembles  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^3$  et dans le cas le plus général à  $\mathbb{Z}^n$ . Inversement, la géométrie des ensembles  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , . . .,  $\mathbb{R}^n$  est appelée géométrie continue. Ainsi, les espaces  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^3$ , . . .,  $\mathbb{Z}^n$  sont appelés les espaces discrets. Inversement, les espaces  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , . . .,  $\mathbb{R}^n$  sont des espaces continus.

Une application quasi-affine est le correspondant de l'application affine dans les espaces discrets. C'est le discrétisé de l'application affine. Plusieurs propriétés des applications affines ne se conservent pas dans le cas discret. La caractérisation des applications affines par le barycentre n'est pas toujours vérifiée pour les applications quasi-affines. Toutes ces applications sont la forme discrète des applications continues (translation, homothétie et rotation). Cette discrétisation fait perdre aux applications quelques-unes de leurs propriétés.

Dans ce papier, le concept d'application affine discrète est rappelé. Ensuite les propriétés des applications affines discrètes sont étudiées en vue de les comparer avec les propriétés des applications affines continues.

## PRÉLIMINAIRES SUR LES APPLICATIONS QUASI-AFFINES

Dans cet article, les concepts et notations suivants sont utilisés :

- Si  $x$  est un réel,  $[x]$  représente la partie entière de  $x$  qui est le plus grand entier inférieur et égal à  $x$ .
- Si  $x$  et  $y$  sont deux entiers,  $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$  représente respectivement le quotient de  $x$  par  $y$ .
- Si  $x(x_1, x_2)$  et  $y(y_1, y_2)$  sont dans  $\mathbb{Z}^2$ , on définit respectivement les distances 4-connexes et 8-connexes par :

$$d_4(x, y) = \sum_{i=1}^2 |y_i - x_i| \text{ et}$$

$$d_8(x, y) = \max_{i=1,2} |y_i - x_i|$$

[KLETTE et ROSENFELD, 2004].

## Application quasi-affine, application quasi-linéaire

Définition 1.

Une application quasi-affine  $\mathcal{F}$ (AQA) est une application discrète définie par ANDRES [ANDRES et

JACOB-DA COL, 2007 ; NEHLIG, 1995 ; JACOB-DA COL, 2001] telle que :

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x' = \left\lfloor \frac{ax + by + e}{\omega} \right\rfloor \\ y' = \left\lfloor \frac{cx + dy + f}{\omega} \right\rfloor \end{cases}$$

avec  $x, y, x', y'$  entiers et  $a, b, c, d, e, f, \omega$  des entiers et avec  $\omega > 0$ . Elle est la partie entière d'une application affine rationnelle.

**Définition 2.**

Une application quasi-linéaire  $F(AQL)$  est une application linéaire discrète définie par :

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x' = \left\lfloor \frac{ax + by}{\omega} \right\rfloor \\ y' = \left\lfloor \frac{cx + dy}{\omega} \right\rfloor \end{cases}$$

avec  $x, y, x', y'$  entiers et  $a, b, c, d, \omega$  des entiers et avec  $\omega > 0$  [BLOT et COEUJOLLY, 2009 ; JACOB-DA COL et TELLIER, 2009]. Elle est la partie entière d'une application linéaire rationnelle. La matrice  $\mathcal{A} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est appelée la matrice de l'application quasi-linéaire.

**Définition 3.**

Une application quasi-affine est bijective si et seulement si  $\omega < \det(A)$ .

**Définition 4.**

Considérons une famille de points  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{Z}^2$  (ou  $\mathbb{Z}^3$ ) et les scalaires  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{Z}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ , on appelle barycentre discret de la famille

$(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  le point  $G$  unique tel que :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

. On montre que le point  $G$  est donné par

$$G = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \right]$$

**Exemple 1.**

Considérons deux points de  $\mathbb{Z}^2$ ,  $A(1,2)$  et  $B(2,-2)$  affectés respectivement des scalaires 3 et 2. Le point

$G \left( \left\lfloor \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)}{3} \right\rfloor \right)$  avec  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 3 \neq 0$  est le barycentre des points  $A$  et  $B$ . D'où  $G \left( \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \right)$

**Proposition 1.**

Une application quasi-affine  $f$  ne conserve nécessairement pas le barycentre discret i.e  $\forall G$  barycentre des points pondérés  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $G' = f(G)$  n'est pas nécessairement le barycentre des points pondérés  $(f(A_i), \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

**Preuve 1.**

En effet considérons  $f$  une application quasi-affine et  $u$  son application quasi-linéaire associée. Soit  $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de points pondérés avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Le barycentre  $G$  de points  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  vérifie

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$  et donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$ . En

utilisant  $u(\overrightarrow{GA_i})$  et si  $\omega = 1$ , on en déduit que

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{(f(G))f(A_i)} = \vec{0}$  ce qui montre que  $f$  conserve le

barycentre des points  $(f(A_i), \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

En outre si  $\omega \neq 1$ , la relation  $u(\overrightarrow{GA_i})$  est vérifiée pour  $\omega = \text{pgcd}(a, b, c, d)$  car il se ramène au cas précédent et n'est pas vérifiée dans les autres cas du fait que l'application linéaire associée à l'application quasi-affine ne vérifie pas la linéarité. D'où l'application quasi-affine ne conserve pas toujours le barycentre. ■

## Quelques applications quasi-affines usuelles

### Translations discrètes

#### ➤ Translation des points isolés

Considérons  $T_{(|u+\alpha|, |v+\beta|)}$  paramétrée par un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Un critère basé sur la distance entre  $T_{(u,v)}(P)$  et  $T_{(|u+\alpha|, |v+\beta|)}(P)$  doit permettre de choisir un couple  $(\alpha, \beta)$ . Le point le plus proche de  $(P_{x+u}, P_{y+v})$  est le point

$$\left( P_x + \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor, P_y + \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \text{ [ANDRES et$$

JACOB-DA COL, 2007].

Une translation discrète adaptée peut donc s'écrire :

$$T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(x + \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor, y + \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$$

Exemple 2.

Soit le vecteur  $V = (-5, 6) \in \mathbb{Z}^2$ , pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , On définit la translation discrète dans  $\mathbb{Z}^2$  par

$$\begin{aligned} T_{(-5,6)}(x, y) &= \left(x + \left\lfloor -5 + \frac{1}{2} \right\rfloor, y + \left\lfloor 6 + \frac{1}{2} \right\rfloor\right) \\ &= \left(x + \left\lfloor -\frac{9}{2} \right\rfloor, y + \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor\right) \\ &= \left(x + \left\lfloor -\frac{9}{2} \right\rfloor, y + \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor\right) \\ &= (x - 5, y + 6) \end{aligned}$$

La Figure 1 illustre la translation de vecteur  $(15, -4)$  des points de  $D \subset \mathbb{Z}^2$

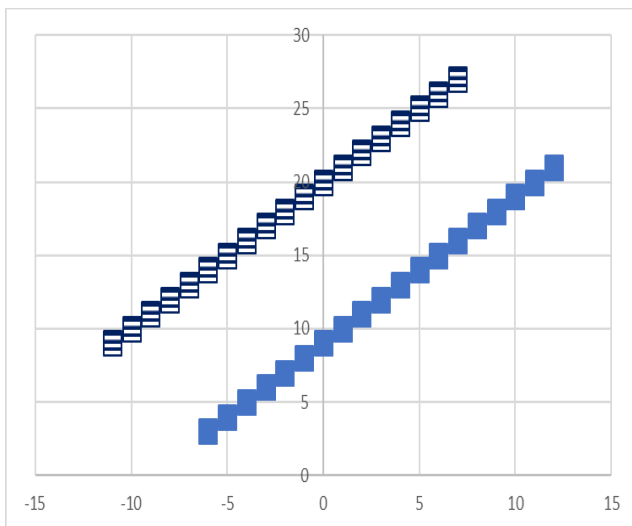


Figure 1. Translation des points isolés.

### ➤ Translation discrète d'objets complexes

Définition 5.

On appelle une droite naïve, une droite discrète définie par

$$D(a, b, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / \gamma \leq ax + by < \gamma + \max(|a|, |b|)\}$$

avec  $a, b \in \mathbb{Z}$

La translation de point isolé diffère de la translation d'objets plus complexes. Examinons le cas d'une translation de droite discrète. Soit une droite euclidienne

$D : ax + by + c = 0$ , avec pour simplifier  $a, b, c$  entiers et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Soit  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{-b}{2} \leq ax + by + c < \frac{b}{2}\}$  sa discrétisation naïve centrée. Cette droite discrète naïve est définie par  $0 \leq ax + by + \gamma < \max(|a|, |b|)$ .

Dans ce cas  $\max(|a|, |b|) = b$  et le fait de définir  $\Delta$  par  $0 \leq ax + by + c + \frac{b}{2} < b$  signifie que nous choisissons les points discrets les plus proches de la droite  $D$ .

A titre d'exemple, la translation de la droite euclidienne  $D$  par le vecteur  $(u, v)$  est la droite  $D' : D' : T_{(u,v)}(D) : a(x - u) + b(y - v) + c = ax + by + c - au - bv = 0$

La discrétisation naïve de cette droite est la droite discrète  $\Delta'$  telle que

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{-b}{2} \leq ax + by + c - au - bv < \frac{b}{2}\}$$

Si les points sont déplacés isolément, on obtient la droite naïve :

$$\begin{aligned} T_{\left(\left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}(\Delta) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{-b}{2} \\ &\leq ax + by + c - a \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor - b \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &< \frac{b}{2}\} \end{aligned}$$

Isolement, chaque point de la droite a bien été déplacé d'un vecteur  $\left(\left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$ . On peut constater que la droite  $T_{\left(\left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}(\Delta)$  est différente de la droite discrète  $\Delta'$  qui est la meilleure approximation du résultat euclidien visé.

Considérons par exemple le droite  $D : x - 4y = 0$ , on opère une translation discrète de vecteur  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

$$\text{On a : } \Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \leq x - 4y - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} < 2\}$$

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \leq x - 4y + 1 < 2\}$$

$$\begin{aligned} T_{\left(\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}(\Delta) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \\ &\leq x - 4y - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor < 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \leq x - 4y - \frac{5}{2} < 2\} \end{aligned}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \leq x - 4y - 0 - 4.0 < 2\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -2 \leq x - 4y < 2\}$$

Homothétie discrète [ANDRES et JACOB-DA COL, 2007]

Soit une image initiale  $\mathcal{I}$  de taille  $J \times K$  que nous désirons agrandir par la transformation géométrique  $\mathcal{A}$  en une image finale  $\mathcal{F}$  de taille  $M \times N$  avec  $M \geq J$  et  $N \geq K$ . Un agrandissement, en tant qu'opération injective, ne se décrit pas très bien par une application quasi-affine mais dans ce cas, l'opération inverse en est une. La transformation inverse  $\mathcal{R}$  est une application quasi-affine contractante et se décrit par :

$$\mathcal{R}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$$

$$(x', y') \mapsto (x, y) = \left( \left\lfloor \frac{Jx'}{M} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{Ky'}{N} \right\rfloor \right)$$

Cherchons à définir la transformation géométrique, on a  $x = \left\lfloor \frac{Jx'}{M} \right\rfloor$  soit  $0 \leq Jx' - Mx < M$ . C'est simplement une droite naïve dans l'espace  $(x, x')$ . Nous avons des expressions similaires pour  $y$  et  $y'$ . En posant

$$C(x) = \left\lfloor \frac{Mx - J - 1}{J} \right\rfloor \text{ et } L(y) = \left\lfloor \frac{Ny - K - 1}{K} \right\rfloor, \text{ nous avons :}$$

$$\mathcal{A}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$(x, y) \mapsto [C(x), C(x + 1) - 1] \times [L(y), L(y + 1) - 1]$$

La Figure 2 illustre l'homothétie discrète de facteur  $\frac{15}{4} \times \frac{13}{3}$ .

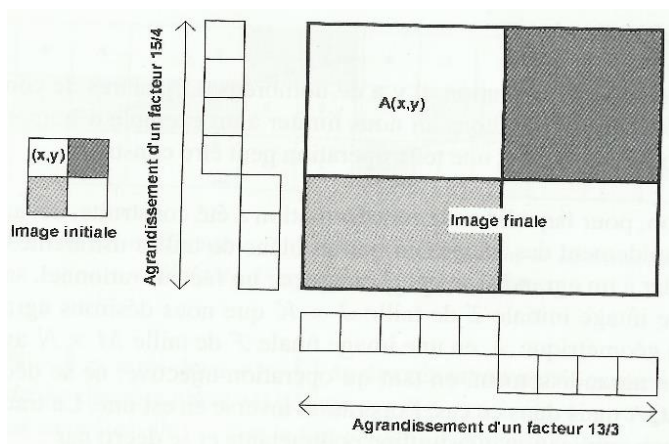


Figure 2. Homothétie discrète de facteur  $\frac{15}{4} \times \frac{13}{3}$  [ANDRES et JACOB-DA COL, 2007].

Rotations discrètes

➤ Rotation pythagoricienne [THIBAUT, 2010]

La rotation pythagoricienne est une rotation discrète bijective définie par

$$RP(k): \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x' = \left\lfloor \frac{bx - ay + \frac{b}{2}}{b+1} \right\rfloor \\ y' = \left\lfloor \frac{ax + by + \frac{b}{2}}{b+1} \right\rfloor \end{cases}$$

avec  $a, b, k$  des entiers

tels que  $a=2k+1$  et  $b=2k(k+1)$ .

Exemple 3.

L'application discrète

$$RP(1): \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x' = \left\lfloor \frac{4x - 3y + 2}{5} \right\rfloor \\ y' = \left\lfloor \frac{3x + 4y + 2}{5} \right\rfloor \end{cases}$$

définit une rotation

pythagoricienne avec  $k = 1, a = 3$  et  $b = 4$ .

La Figure 3 illustre cette rotation.

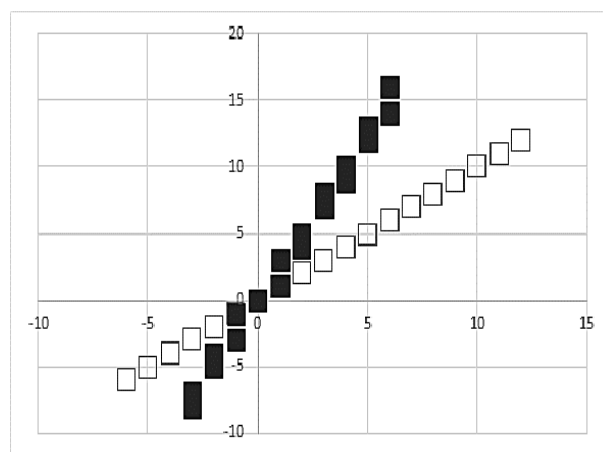


Figure 3. Rotation Pythagoricienne où  $k=1$ .

Nous remarquons immédiatement que  $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$ . Le non de rotation provient du triplet  $(a, b, b+1)$  qui est appelé triplet pythagoricien. L'ensemble  $\{(2k + 1, 2k(k + 1), 2k(k + 1) + 1) : k \in \mathbb{Z}\}$  décrit tous les triplets pythagoriciens de la forme  $(a, b, b+1)$ . Cette rotation est intéressante pour différentes raisons :

On peut démontrer qu'elle est bijective, c'est-à-dire :  $RP(k)^{-1} = RP(-k-1)$ , la preuve est assez difficile à établir [THIBAUT, 2010]

Elle permet à un réseau de points discrets d'avoir une rotation optimale égale à la rotation euclidienne. En effet, par construction, les points discrets de coordonnées  $m(a, b)n(b, -a)$  et  $(b + 1)(m, n)$  avec  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , ont la même image par la rotation pythagoricienne et la rotation euclidienne de même angle. Les points noirs au centre de pixels représentent les points qui ont une rotation optimale via la rotation pythagoricienne  $RP(1)$ .

Une dernière propriété provient du fait que la rotation pythagoricienne n'est rien d'autre qu'une rotation discrète réelle tronquée. En supposant une répartition aléatoire des points discrets après rotation, le critère de distance doit par conséquent nous donner les valeurs proches de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{12} (2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}))$$

en distance maximale et moyenne.

Nous pouvons remarquer ce qui suit :

En général,  $RP(i) \circ RP(j)$  n'est pas une rotation pythagoricienne, ni même une application quasi-affine.

Cette rotation n'est définie que pour les angles  $\theta_k = \arctg\left(\frac{2k+1}{2k(k+1)}\right)$ .

#### ➤ Rotation quasi-transvection

Construisons une rotation discrète bijective en se servant d'une décomposition de la rotation quasi-transvection [ANDRES, 1996]. Le principe de cette rotation discrète a été introduit par REVEILLES [1991]. Une rotation euclidienne peut se décomposer en trois transvections euclidiennes :

$$Rot(\theta, (x_0, y_0)) = TH \circ TV \circ TH$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha' \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\alpha' \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$$

Où :  $\omega > 0$  est une valeur arbitraire réelle,  $\alpha = \omega \sin\theta$ ,  $\alpha' = \omega \sin\frac{\theta}{2}$  et  $\beta' = \omega \cos\frac{\theta}{2}$ .

La rotation quasi-transvection consiste à remplacer chaque transvection euclidienne par une application quasi-affine appelée quasi-transvection.

Considérons une transvection euclidienne horizontale définie de la manière suivante :

$$TH: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x' = x + \left\lfloor \frac{ty+v}{u} \right\rfloor \\ y' = y \end{cases} \quad \text{avec } t, u, v \text{ des entiers,}$$

$u > 0$ .

La valeur  $\frac{t}{u}$  est appelée la pente de la quasi-transvection et  $v$  la constante de translation. La quasi-transvection correspond simplement à un décalage dans les lignes ou les colonnes ; par conséquent une quasi-

transvection est toujours une application discrète bijective.

La rotation quasi-transvection de centre  $(x_0, y_0)$  et d'angle  $\theta$  est définie par :

$$RQT(\theta, x_0, y_0): \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(x, y) \mapsto (QTH' \circ QTV' \circ QTH')(x, y)$$

Avec

$$QTH' = QTH(-a', b', \left\lfloor \frac{b' - 2y_0 a'}{2} \right\rfloor)$$

$$QTV' = QTV(a, \omega, \left\lfloor \frac{\omega - 2ax_0}{2} \right\rfloor)$$

Où :  $\theta, x_0, y_0$  sont des réels et  $a, a', b', \omega$  des entiers vérifiant l'expression :

$$\omega = 2^{15}$$

$$a = \lfloor \omega \cdot \sin\theta \rfloor$$

$$a' = \left\lfloor \omega \cdot \sin\frac{\theta}{2} \right\rfloor \text{ et } b' = \left\lfloor \omega \cdot \cos\frac{\theta}{2} \right\rfloor$$

## CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS AFFINES DANS L'ESPACE CONTINU

Dans cette section, il nous semble nécessaire de commencer par une caractérisation des applications affines en vue d'une comparaison. Les applications discrètes retenues sont celles quasi-affines car elles se rapprochent des applications affines.

### Caractérisations des applications affines

Les applications affines dans les espaces continus sont les plus connues. Ce paragraphe consistera à dresser un tableau caractérisant celles-ci. On se focalisera sur les applications affines conservant la distance, i.e les isométries, et celles ayant un point fixe.

Les isométries affines de l'espace affine euclidien de dimension 1 sont les translations et les symétries centrales.

Les isométries affines du plan affine euclidien sont les translations, les rotations, les réflexions et les symétries glissées. On peut dresser le [Tableau 1](#) suivant [MICHELE, 2006] :

Tableau 1-Classification des isométries de  $\mathbb{R}^2$ 

	Translations	Rotations	Réflexions	Symétries glissées
<b>Ensemble invariant</b>	pas de point invariant	un unique point fixe	une droite de points fixes	pas de point fixe
<b>Droites invariantes</b>	une direction de droites	Pas de droite invariante	et une direction de droites	une unique droite invariante
<b>Décomposition en réflexions</b>	2 droites parallèles	2 droites sécantes	1 droite	3 droites

Les isométries affines de l'espace euclidien à trois dimensions sont les translations, les demi-tours, les demi-tours glissés, les vissages, symétries centrales, les réflexions, les réflexions glissées et les anti-rotations (Tableau 2).

Tableau 2. Classification des isométries de  $\mathbb{R}^3$ 

	Translations	Rotations	Vissages	Symétries centrales
<b>Ensemble invariant</b>	pas de point invariant	Une droite de points fixes	Pas de points fixes	Un hyperplan de points fixes
<b>Droites invariantes</b>	une direction de droites	Pas de droite invariante	et une direction de droites	une unique droite invariante
<b>Décomposition en réflexions</b>	2 droites parallèles	2 droites sécantes	1 droite	3 droites

## Etudes des applications discrètes

### Translation pour un point isolé

#### Proposition 2.

Toute translation discrète de point isolé conserve les distances discrètes  $d_4$  et  $d_8$ .

Preuve : En effet,  $\forall A(a,b), B(a',b') \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $T(A)$  et  $T(B) \in \mathbb{Z}^2$ , on a :

$$d_4(T(A), T(B)) = \left| a' + \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor - a - \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor \right| + \left| b' + \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor - b - \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$$

$$d_4(T(A), T(B)) = |a' - a| + |b' - b|$$

$$d_4(T(A), T(B)) = d_4(A, B)$$

Et pour

$$d_8(T(A), T(B)) = \max \left( \left| a' + \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor - a - \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|; \left| b' + \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor - b - \left\lfloor v + \frac{1}{2} \right\rfloor \right| \right)$$

$$d_8(T(A), T(B)) = \max(|a' - a|; |b' - b|)$$

$$d_8(T(A), T(B)) = d_8(A, B)$$

Donc la translation discrète conserve les distances.

De la même manière, on montrera que les translations discrètes dans  $\mathbb{Z}^3$  conservent les distances de  $\mathbb{Z}^3$ .

#### Proposition 3.

Les translations discrètes des points isolés ne laissent aucun point fixe

#### Preuve 2.

En effet, pour tout vecteur  $(u, v) \neq (0, 0)$ . En considérant la translation  $T_{(u,v)}$  définie ci-dessus, l'ensemble des points fixes  $V$  sera défini par  $V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : T_{(u,v)}(x, y) = (x, y)\}$ .

Montrons que  $V$  est vide.

En effet, selon la définition

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : T_{(u,v)}(x, y) = (x, y)\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x + \lfloor u + \frac{1}{2} \rfloor, y + \lfloor v + \frac{1}{2} \rfloor) = (x, y)\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + \lfloor u + \frac{1}{2} \rfloor = x \text{ et } y + \lfloor v + \frac{1}{2} \rfloor = y\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \lfloor u + \frac{1}{2} \rfloor = 0 \text{ et } \lfloor v + \frac{1}{2} \rfloor = 0\}$$

$$V = \emptyset$$

Remarque : Les autres points de l'objet restent fixes. Tout point qui n'est considéré comme isolé n'est pas modifié c'est-à-dire un point  $A$  tel que  $T_\alpha(A, X) \neq 0$ .

#### Proposition 4.

Les angles sont conservés dans la translation discrète des points isolés.

#### Translation discrète d'objets complexes

La translation de point isolé est une chose différente de la translation d'objets plus complexes. Ici nous nous reposons sur une meilleure approximation de la translation affine euclidienne. Contrairement aux translations affines, les translations discrètes offrent une multiplicité des solutions. Ainsi, il faut opérer un meilleur choix pour n'est pas s'écarter de la réalité. Dans l'exemple traité ci-haut, on constate que la translation discrète de la

droite ne correspond pas à la translation euclidienne de la même droite discrétisée.

### Homothétie discrète

Dans la définition de l'homothétie discrète, nous remarquons qu'aucun point n'est fixe. Tout point de l'image subit une augmentation de la taille.

### Rotations discrètes

#### ➤ Rotation pythagoricienne

La rotation pythagoricienne est une rotation discrète bijective. Elle produit une rotation optimale égale à la rotation euclidienne. Tous les points subissent des rotations mais ceux d'une rotation optimale sont mis en exergues.

transvection [ANDRES et JACOB-DA COL, 2007]. Le principe de cette rotation discrète a été introduit par REVEILLES [1991].

Une rotation euclidienne se décompose en trois translations euclidiennes.

Nous résumons cette étude de conversation des propriétés par la proposition 2 et le Figure 4.

#### Proposition 5.

Soit  $f$  une application quasi-affine discrète définie dans  $\mathbb{Z}^2$

Si  $f$  est une translation discrète alors  $f$  conserve le barycentre, les distances, l'orientation des angles.

Si  $f$  est une rotation discrète alors  $f$  ne conserve pas toujours les distances et les angles.

Si  $f$  est une homothétie discrète alors  $f$  ne possède aucun point fixe.

Les résultats précédents sont résumés dans le Figure4.

### CONCLUSION

Les différentes définitions des applications affines dans les espaces discrets ont permis d'établir la comparaison sur la conservation de barycentre, conservation de l'alignement des droites, conservation de distances, la préservation de l'orientation des angles et sur la possession de point fixe.

Les transformations affines conservent plusieurs propriétés alors que celles discrètes n'en conservent pas toutes. Cet article, axé sur une étude comparative de ces applications dans les espaces continues et discrets, a conduit aux résultats suivants :

- Les translations discrètes conservent les distances, les barycentres, les angles et tous les points sont invariants. Ici, il y a lieu de différencier celles des points isolés et des objets complexes.
- Les rotations discrètes ne préservent pas toujours les angles et ne présentent pas la structure de groupe car la composée de deux rotations n'est pas une rotation. Il y a lieu de préciser que ceci n'est pas valable pour la rotation quasi-transvection. Celle-ci tend à se rapprocher de la rotation continue. Et enfin, l'homothétie discrète ne possède pas.

	Espaces continues	Espaces discrets
Translation	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conserve le barycentre</li> <li>- Conserve l'alignement des droites</li> <li>- Conserve les distances</li> <li>- Préserve l'orientation des angles</li> <li>- Possède plusieurs points fixes ou aucun point fixe</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conserve le barycentre</li> <li>- Conserve l'alignement des droites</li> <li>- Conserve les distances</li> <li>- Préserve l'orientation des angles</li> <li>- Possède au moins un point fixe car il faut tenir compte de la translation des points isolés ou de la translation de groupe d'objets</li> </ul>
Rotation	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conserve le barycentre</li> <li>- Conserve l'alignement des points</li> <li>- Conserve les distances</li> <li>- Préserve l'orientation des angles</li> <li>- Possède plusieurs points fixes ou aucun point fixe</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- N'est défini que pour les angles <math>\theta_k = \arctg\left(\frac{2k+1}{2k(k+1)}\right)</math></li> <li>- n'est pas un groupe pour la composition (rotation pythagoricienne)</li> <li>- ne conserve pas toujours les distances</li> <li>- ne préserve pas toujours les angles</li> </ul>
Homothétie	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Possède un point fixe de rapport <math>k</math> un réel ou un complexe</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ne possède aucun point fixe de rapport <math>L \times 1</math></li> </ul>

Figure 4. Tableau comparatif des applications affines et des applications quasi-affines

#### ➤ Rotation quasi-transvection

C'est une rotation discrète bijective construite en se servant d'une décomposition de la rotation quasi-

**RÉSUMÉ**

Une application quasi-affine, étant la partie entière d'une application affine rationnelle, est la forme discrétisée d'une application affine. Cet article est consacré à l'étude de conservation des principales propriétés des applications affines (conservation des barycentres, conservation de distance, existence d'un point fixe) par les applications quasi-affines. Les applications quasi-affines étudiées sont les translations discrètes, les homothéties discrètes ainsi que les rotations discrètes.

**Mots Clés**

*Géométrie discrète, application quasi-affine, application quasi-linéaire.*

**REFERENCES**

- ANDRESE.** [1996]. The quasi-shear rotation. Discrete geometry for computer imagery, (pp. 307-314). Verlag.
- ANDRES E., JACOB-DA COL M.-A.** [2007]. Géométrie discrète et images numériques. (D. Coeurjolly, A. Montanvert, & J.-M. Chassery, Eds.) Paris: Lavoisier.
- BLOT V., COEJOLLY D.** [2009]. Quasi-affine Transformation in Higher dimension. 15th International Conférence on Discrete Geometry for Computer Imagery, LNCS. 5810. Montreal: Springer.
- JACOB-DA CO M.-A., TELLIER P.** [2009]. Quasi-linear transformations and discrete tilings. Theoretical Computer Science, 410, 2126-2134.
- JACOB-DA COL M.-A.** [2011]. Applications quasi-affines et pavages du plan discret. Theoretical Computer Science, 259(1-2), 245-269.
- KLETTE R., ROSENFELD A.** [2004]. Digital geometry, geometry methods for digital pictures analysis. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.
- MICHELE A.** ([2006]. Géométrie. Strasbourg: EDP Sciences.
- NEHLIG P.** [1995]. Applications quasi-affines : pavages par images réciproques. Theoretical Computer Science, 156, 1-38.
- REVEILLES J.-P.** [1991]. Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et analogique. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.
- THIBAUT Y.** [2010]. Rotations in 2D and 3D discrete spaces. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, France.



This work is in open access,

licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in the credit line; if the material is not included under the Creative Commons license, users will need to obtain permission from the license holder to reproduce the material. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>